

# ETUDE DU TRANSPORT DE MASSE DANS UN MELANGE GAZEUX BINAIRE EN ECOULEMENT TURBULENT AVEC ASPIRATION PARIETALE

D. MASSIGNON, A. ROSENGARD et SOUBBARAMAYER

Département de Physico-Chimie, C.E.N. Saclay, B.P. n° 2, Gif-sur-Yvette, Essonne, France

(Reçu le 31 octobre 1969)

**Résumé**—On donne une méthode de calcul du profil des titres (ou fractions molaires) et du Sherwood pour un mélange binaire gazeux (masses moléculaires voisines) en écoulement turbulent dans un tube cylindrique avec aspiration pariétale. Pour cela on part d'un profil universel de vitesses  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  et d'une valeur du Schmidt turbulent. Par une intégration directe de l'équation de la diffusion, on obtient le profil des titres et l'épaisseur de diffusion sous la forme d'une première approximation (valable pour un taux d'aspiration  $\mathcal{A}_0 \rightarrow 0$ ) et d'une deuxième approximation ( $\mathcal{A}_0$  faible) que l'on compare à des mesures directes.

### NOTATIONS\*

$\mathcal{A}$ ,	taux d'aspiration; $v_a/\bar{u}(x) = Ra/Re$	$N_R$ ,	titre de référence; $\overline{N(0)}$
$a$ ,	rayon du tube poreux;	$N_p$ ,	titre moyen du gaz enrichi;
$C_f$ ,	coefficient de frottement;	$N_w$ ,	titre moyen du gaz appauvri;
$C, C_1, C_2$ ,	concentrations molaires totales, du gaz 1, du gaz 2.	$N_0(r)$ ,	profil des titres en $x = 0$ ;
$D, D'$ ,	débit d'entrée et débit pariétal total;	$Nu$ ,	nombre de Nusselt;
$\mathcal{D}_{12}$ ,	coefficient de diffusion mutuelle;	$n$ ,	titre réduit; voir (2.15);
$\mathcal{D}'_{12}$ ,	coefficient de diffusion turbulente;	$n^0, n^1$ ,	voir (3.6);
$K$ ,	$-4/Re_0 Sc$ ;	$P, P', P''$ ,	pressions respectives du gaz entrant, enrichi, appauvri;
$l$ ,	longueur du tube poreux;	$Pr, Pr'$ ,	nombres de Prandtl ordinaire et turbulent;
$M_1, M_2$ ,	masses moléculaires des gaz 1 et 2 ( $M_1 < M_2$ );	$p$ ,	pression locale;
$N(x, r)$ ,	$C_1/C$ titre (ou fraction molaire) local en élément léger;	$Ra$ ,	$2aV_a(x)/v$ nombre de Reynolds d'aspiration;
$N_s$ ,	titre local du gaz diffusé;	$Re$ ,	$2a\bar{u}(x)/v$ nombre de Reynolds de l'écoulement;
$N'$ ,	fluctuation du titre;	$r$ ,	distance à l'axe;
		$S$ ,	rendement de séparation (2.7);
		$Sc$ ,	$v/\mathcal{D}_{12}, Sc' = v'/\mathcal{D}'_{12}$ nombres de Schmidt ordinaire et turbulent;
		$Sh$ ,	nombre de Sherwood;
		$U$ ,	$2u/\bar{u}_0$ ;
		$U_0, U_1, U_2$ ,	voir (3.2);
		$u, u^*$ ,	composantes axiales de $\vec{v}$ et $\vec{v}^*$ ;
		$u'$ ,	fluctuation de $u$ ;

\* L'indice 0 après une grandeur signifie qu'il s'agit de la valeur de cette grandeur en  $x = 0$ . Par exemple  $Re_0$  est le Reynolds en  $x = 0$ .

$\bar{u}$ ,	$2/a^2 \int_0^a ur \, dr$ vitesse moyenne de débit ;
$u_\tau$ ,	$\bar{u} \sqrt{C_f/2}$ vitesse de frottement ;
$u^+$ ,	$u/u_\tau$ ;
$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ,	vitesse molaires des gaz 1 et 2 ;
$\bar{v}, \bar{v}^*$ ,	vitesse massique et molaire du mélange ;
$\bar{v}, \bar{v}^*$ ,	composantes radiales de $\bar{v}$ et $\bar{v}^*$ ;
$v_a, v_a^*$ ,	vitesse d'aspiration (massique et molaire) ;
$v^+$ ,	$v_a/u_\tau$ ;
$V$ ,	$2v/\bar{u}_0 \mathcal{A}_0$ ;
$W$ ,	voir (3.18) ;
$X$ ,	$x/a$ ;
$x$ ,	abscisse ;
$y^+$ ,	$au_\tau(1 - \lambda)/v$ ;
$y^*$ ,	$u_{\tau_0} a/v = \sqrt{(C_f/2) Re_0/2}$ ;
$Z$ ,	rendement de mélange, voir (6.2) ;
$\delta$ ,	épaisseur de diffusion, voir (2.3) ;
$\delta_0, \delta_1, \delta_2$ ,	voir (3.66) ;
$\varepsilon^*$ ,	$\sqrt{(M_2/M_1) - 1}$ ;
$\theta$ ,	$D'/D$ coefficient de partage global ;
$\theta_x$ ,	coefficient de partage local ;
$\lambda$ ,	$r/a$ ;
$v, v'$ ,	viscosités cinématiques ordinaire et turbulente ;
$v_T, v_{T_0}, v_{T_1}, v_{T_2}$ ,	voir (3.4) ;
$\rho$ ,	masse spécifique ;
$\varphi$ ,	profil universel des vitesses ;
$\Omega$ ,	ensemble des valeurs propres ;
$\omega$ ,	valeur propre.

notations  $\sim$  :

$$\widetilde{G(X, \lambda)} = \frac{\int_0^1 G(X, \lambda) U(X, \lambda) \lambda \, d\lambda}{\int_0^1 U(X, \lambda) \lambda \, d\lambda}$$

$$= \frac{\int_0^1 G(X, \lambda) U(X, \lambda) \lambda \, d\lambda}{1 - 2\mathcal{A}_0 X}$$

quand  $\mathcal{A}_0 \rightarrow 0$  :  $\widetilde{G(X, \lambda)} = \int_0^1 G(X, \lambda) U_0 \lambda \, d\lambda$ .

1. INTRODUCTION

IL Y A une classe de problèmes, en transport de masse, où le mouvement radial, même faible, a une importance primordiale: par exemple, la séparation des constituants d'un mélange gazeux binaire par diffusion à travers une paroi poreuse, la condensation, l'évaporation ou les réactions chimiques sur une paroi. Ces problèmes de transport de masse sont analogues au transport de chaleur avec courant de chaleur imposé à travers la paroi quand il y a aussi aspiration pariétale.

Or, l'étude du transport de masse ou de chaleur en régime turbulent utilise le plus souvent l'analogie avec le transport de la quantité de mouvement [1-3]; certains auteurs [4, 5] intègrent directement l'équation de convection. Dans ces études, on admet en outre que l'écoulement dans un tube ou le long d'un plan se fait dans une seule direction, les vitesses radiales étant supposées nulles.

Dans cet article, nous intégrons l'équation de la diffusion, à partir d'un profil expérimental des vitesses, et en faisant une hypothèse sur le Schmidt turbulent. Nous avons ainsi déterminé le profil des titres d'un mélange binaire gazeux en écoulement turbulent dans un tube cylindrique avec aspiration pariétale.

L'intégration de l'équation de la convection de la chaleur a été étudiée, mais seulement dans le cas d'une aspiration nulle par Haberstroh et Baldwin [5], qui n'ont donné que la solution asymptotique valable loin de l'entrée du tube cylindrique. Nous donnons ici la solution générale de l'équation de la diffusion à la limite de l'aspiration nulle ( $\mathcal{A}_0 = 0$ ), ce qui permet d'étudier l'établissement à partir de l'entrée du profil des titres (ou des températures), et celui du Sherwood. Une solution générale analogue a déjà été donnée par Hunziker [4] pour un problème différent à aspiration nulle (température constante à la paroi, au lieu de courant de chaleur uniforme).

Nous donnons ensuite la solution générale dans le cas d'une aspiration faible (qui est celui rencontré fréquemment en pratique) en adaptant

pour cela le profil des vitesses de Reichardt [6] au cas d'un écoulement turbulent avec aspiration pariétale. Nous étendons ainsi au régime turbulent les études faites par Yuan [7] dans le cas du régime laminaire.

2. LE CHAMP DES TITRES MOLAIRES ET L'ÉPAISSEUR DE DIFFUSION

2.1 Définition

Considérons un mélange de deux gaz ( $M_1 < M_2$ ) en écoulement isotherme et incompressible dans un tube cylindrique à paroi poreuse de rayon  $a$ . On supposera ici cet écoulement établi au moyen d'un tube de guidage non poreux, précédant la paroi poreuse (Fig. 1). En un point

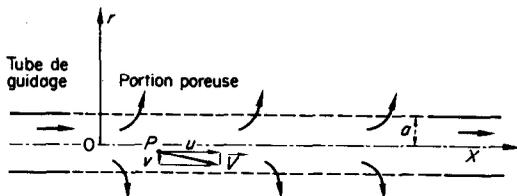


FIG. 1. Tube cylindrique à paroi poreuse.

du cylindre, les vitesses molaire  $\vec{v}^*$  et massique  $\vec{v}$  seront

$$\vec{v}^* = \frac{C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2}{C}, \quad v = \frac{M_1 C_1 \vec{v}_1 + M_2 C_2 \vec{v}_2}{M_1 C_1 + M_2 C_2} \tag{2.1}$$

Une différence de pression positive entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre se traduit alors par une vitesse d'aspiration pariétale  $v_a^* = v^*(x, a)$ . En passant à travers la paroi poreuse, le gaz s'enrichit [8] en élément léger :  $N(x, r)$  croît de  $N(x, a)$  à  $N_s$ . Cet enrichissement est compensé par un appauvrissement du gaz à l'intérieur du cylindre au voisinage de la paroi ; et il s'établit donc, dans chaque section d'abscisse  $(x)$  du tube, un profil des titres  $N(x, r)$ , décroissant de  $N(x, 0) = N_{\max}$  sur l'axe à  $N(x, a)$  sur la paroi (Fig. 2).

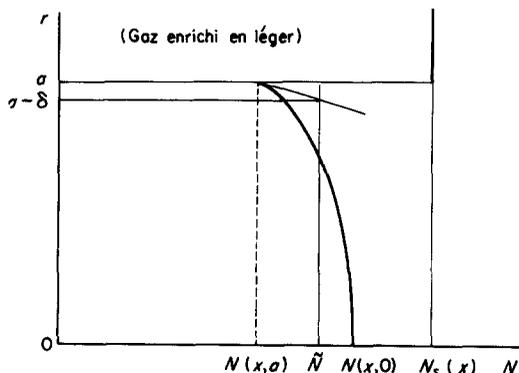


FIG. 2. Allure du profil radial des titres dans la section  $(x)$ .

A partir de ce profil des titres, on peut définir dans la section  $(x)$  un titre moyen  $\tilde{N}(x)$ , pondéré, par le débit molaire, par :

$$\tilde{N}(x) = \frac{\int_0^a N(x, r) u^*(x, r) 2\pi r dr}{\int_0^a u^*(x, r) 2\pi r dr} \tag{2.2}$$

On sait en effet, que les variations radiales de la pression du gaz sont négligeables [9] :  $C$  est alors constante en  $r$ , et n'intervient pas dans (2.2). Introduisons aussi l'épaisseur de diffusion [8, 10, 11].

$$\delta(x) = \frac{\tilde{N}(x) - N(x, a)}{-(\partial N / \partial r)_a} = \frac{2a}{Sh(x)} \tag{2.3}$$

où  $Sh(x)$  est le Sherwood  $2a/\delta$ .

Enfin le champ des titres  $N(x, r)$  est à chaque instant défini à l'intérieur du tube cylindrique par l'équation de diffusion [12] qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial CN}{\partial t} + \text{div}(CN\vec{v}^*) = \text{div}(C\mathcal{D}_{12} \text{grad } N) \tag{2.4}$$

2.2 Conditions aux limites

(a) La condition sur l'axe ( $r = 0$ ) résulte de la symétrie cylindrique du champ des titres

$$\frac{\partial N}{\partial r}(x, 0) = 0. \tag{2.5}$$

(b) La condition sur la paroi ( $r = a$ ) est donnée par la conservation du courant molaire de l'élément léger à travers celle-ci [10]

$$N(x, a) v_a^* - \mathcal{D}_{12} \frac{\partial N}{\partial r}(x, a) = N_s(x) v_a^*. \quad (2.6)$$

Il est plus commode, en pratique, de remplacer dans la condition (2.6) le titre de sortie  $N_s(x)$  par le rendement de séparation local  $S(x)$  de la paroi poreuse [8], qui est lié à  $N_s(x)$  par :

$$S(x) = \frac{N_s(x) - N(x, a)}{\varepsilon^* N_s(1 - N_s)} [1 + \varepsilon^*(1 - N_s)]. \quad (2.7)$$

Or,  $\varepsilon^*$  est  $\ll 1$  lorsque les masses  $M_1$  et  $M_2$  sont très voisines (cas d'un mélange isotopique, par exemple) : dans ce cas,  $N(x, a)$  et  $N_s$  sont très voisins et, d'après (2.7), (2.6) est sensiblement équivalent à la condition :

$$\mathcal{D}_{12} \frac{\partial N}{\partial r}(x, a) + v_a^* \varepsilon^* S(x) N(x, a) [1 - N(x, a)] = 0. \quad (2.8)$$

(c) On aura, enfin, une condition à l'entrée du cylindre poreux en se donnant le profil des titres pour  $x = 0$ ,

$$N(0, r) = N_0(r). \quad (2.9)$$

Si l'on fait coïncider cette origine  $x = 0$  avec le début de la partie diffusante, il est naturel de prendre un profil uniforme (voir [13-15]),

$$N(0, r) = N_0 = \text{Cte.} \quad (2.10)$$

### 2.3 Equation de la diffusion turbulente

Dans ce qui suit, nous supposons très voisines les masses  $M_1$  et  $M_2$  des deux constituants du gaz. Nous pourrions alors confondre  $\bar{v}$  et  $\bar{v}^*$  : en effet, on peut montrer dans ce cas que l'écart relatif entre  $\bar{v}^*$  et  $\bar{v}$  est toujours négligeable [11] [ $|\bar{v}|/|\bar{v}^*| - 1| \leq \varepsilon^*(M_2/M_1 - 1)/4$ ].

Nous supposons, d'autre part, que le taux d'aspiration local  $\mathcal{A}(x)$  est toujours faible. Nous supposons aussi la perméabilité de la paroi uniforme et le tube assez court pour négliger la variation de la pression avec  $x$  :  $v_a(x)$  et  $Ra(x)$  seront des constantes  $v_a$  et  $Ra$ . Nous pourrions aussi négliger, pour la même raison, la dépendance en  $x$  de  $C$  qui s'élimine de (2.4). Enfin  $\mathcal{D}_{12}$  peut être considéré comme constant.

En écoulement turbulent et en régime permanent, l'équation de la diffusion (2.4) devient du fait de la symétrie cylindrique,

$$\frac{\partial Nu}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rNv)}{\partial r} = \mathcal{D}_{12} \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \overline{N'u'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \overline{N'v'}. \quad (2.11)$$

Si l'on néglige dans (2.11) les termes de diffusion longitudinale (ordinaire et turbulente) devant ceux de la diffusion radiale (voir appendice 1), nous obtenons [11],

$$r \frac{\partial Nu}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} Nv + Nv = \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{v}{Sc} + \frac{v'}{Sc'} \right) \frac{\partial N}{\partial r} \right], \quad (2.12)$$

où l'on a introduit le coefficient de viscosité turbulente et le Schmidt turbulent  $Sc'$  par :

$$v' \frac{\partial u}{\partial r} + \overline{u'v'} = 0, \quad \mathcal{D}'_{12} \frac{\partial N}{\partial r} + \overline{N'v'} = 0, \quad Sc' = v'/\mathcal{D}'_{12}. \quad (2.13)$$

Compte tenu de la conservation de la masse, on a enfin, comme pour le transport de la chaleur [7, 16]

$$ru \frac{\partial N}{\partial x} + rv \frac{\partial N}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{v}{Sc} + \frac{v'}{Sc'} \right) \frac{\partial N}{\partial r} \right]. \quad (2.14)$$

### 2.4 Equation du champ des titres

Introduisons un titre réduit  $n$  par la relation

lineaire en  $n$  et  $N$   
 $N(x, r)$

$$= N_R \left[ 1 + \varepsilon^* S(x) \frac{Ra(x)}{2} Sc(1 - N_R) n(x, r) \right] \tag{2.15}$$

où  $N_R$  est un titre de référence, voisin des titres  $N$  à l'intérieur du tube, pour lequel on peut prendre, par exemple, la valeur moyenne (2.2) du titre en  $x = 0 (N_R = \bar{N}(0))$ . Comme les titres  $N$  varient assez peu,  $|1 - N/N_R| \ll 1$  et l'on pourra négliger les termes du 2<sup>o</sup> ordre en  $\varepsilon^*$  et, donc, écrire à partir de (2.14), (2.5), (2.6) et (2.9)

$$\left. \begin{aligned} ru \frac{\partial n}{\partial x} + rv \frac{\partial n}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{v}{Sc} + \frac{v'}{Sc'} \right) \frac{\partial n}{\partial r} \right] \\ a \frac{\partial n}{\partial r}(x, a) + 1 &= 0, \quad \frac{\partial n}{\partial r}(x, 0) = 0, \\ n(0, r) &= n_0(r) \end{aligned} \right\} \tag{2.16}$$

où  $n_0(r)$  correspond au profil initial  $N_0(r)$  [avec  $\widetilde{n_0(r)} = 0$ ].

Ces équations (2.16) ont exactement la même forme que celles du transport de chaleur avec aspiration à travers une paroi poreuse, avec un courant constant de chaleur extrait de cette paroi. Si on fait  $v = 0$  (aspiration nulle) dans (2.16) on retrouve une forme classique [4, 5] de l'équation de la chaleur, et des conditions aux limites associées.

**3. RESOLUTION DE L'EQUATION DU CHAMP DES TITRES**

**1. Méthode de résolution**

Pour résoudre le système (2.16), il faut connaître les champs des vitesses axiale  $u(x, r)$  et radiale  $v(x, r)$  et le champ de la viscosité turbulente  $v'(x, r)$ , et aussi faire une hypothèse sur le Schmidt turbulent  $c'S$ . Cette résolution a été donnée par l'un de nous dans le cas d'un écoulement laminaire [15].

Les expressions analytiques de  $u(x, r)$ ,  $v(x, r)$  et  $v'(x, r)$  peuvent être déduites d'un profil universel des vitesses dans un cylindre avec aspiration pariétale

$$u^+ = \varphi(y^+, v^+). \tag{3.1}$$

On a trouvé (cf. appendice 2) les expressions suivantes sans dimensions de ces champs, au premier ordre en  $\mathcal{A}_0$  et pour un Reynolds en  $\mathcal{A} = 0$  donné  $Re_0$ ,

$$\frac{u(x, r)}{\bar{u}_0/2} = U(X, \lambda) = U_0(\lambda) + U_1(\lambda) \mathcal{A}_0 X + U_2(\lambda) \mathcal{A}_0, \tag{3.2}$$

$$\frac{v(x, r)}{\bar{u}_0/2} = V(\lambda) \mathcal{A}_0, \tag{3.3}$$

$$\left( 1 + \frac{Sc v'}{Sc' v} \right) (x, r) = v_T(X, \lambda) = v_{T_0} + v_{T_1} \mathcal{A}_0 X + v_{T_2} \mathcal{A}_0, \tag{3.4}$$

avec  $X = x/a$ ,  $\lambda = r/a$  et où les fonctions  $U_0, U_1, U_2$  doivent toujours vérifier les relations (A.12) de l'appendice 2.

On trouvera dans cet appendice 2 les valeurs et la méthode de calcul des coefficients de ces développements en  $\mathcal{A}_0$ , développements valables pour un taux d'aspiration d'entrée faible ( $0 < \mathcal{A}_0 \lesssim 2 \cdot 10^{-3}$ ) et pour un cylindre pas trop allongé ( $0 < (\mathcal{A}_0 x/a) \lesssim 0,05$ ). La première de ces conditions correspond au domaine le mieux étudié des valeurs du taux d'aspiration. On peut s'affranchir de la seconde en prenant pour nouvelle origine l'extrémité de la portion de cylindre étudiée et en y prenant pour pression, Reynolds  $Re_0$ , taux d'aspiration  $\mathcal{A}_0$  et titre moyen  $\bar{N}_0$  les valeurs déterminées à l'extrémité de la portion étudiée. Cette même remarque nous a permis de négliger les variations de la pression avec  $x$ .

Le système d'équations (2.16) devient, avec les champs de grandeurs sans dimensions

$U(X, \lambda)$ ,  $V(\lambda)$  et  $v_T(X, \lambda)$  de (3.2), (3.3) et (3.4),

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n) = \lambda U(X, \lambda) \frac{\partial n}{\partial X} + \lambda V(\lambda) \mathcal{A}_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda} \\ - \frac{4}{Re_0 Sc} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \lambda v_T(X, \lambda) \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right] = 0 \\ \frac{\partial n}{\partial \lambda}(X, 1) = -1, \quad \frac{\partial n}{\partial \lambda}(X, 0) = 0, \\ n(0, \lambda) = n_0(\lambda) \end{aligned} \right\} (3.5)$$

Comme  $\mathcal{A}_0$  est faible, il est naturel de chercher une solution de la forme :

$$n = n^0 + \mathcal{A}_0 n^1. \quad (3.6)$$

En portant (3.6) et (3.2), (3.3), (3.4) dans (3.5), il vient, au 1<sup>o</sup> ordre en  $\mathcal{A}_0$ , après identification des termes constants et des termes en  $\mathcal{A}_0$ , et en posant  $K = -\frac{4}{Re_0 Sc}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n^0) = \lambda U_0(\lambda) \frac{\partial n^0}{\partial X} + K \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda v_{T_0} \frac{\partial n^0}{\partial \lambda} \right) = 0 \\ \frac{\partial n^0}{\partial \lambda}(X, 1) = -1, \quad \frac{\partial n^0}{\partial \lambda}(X, 0) = 0, \\ n^0(0, \lambda) = n_0(\lambda) \end{aligned} \right\} (3.7)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n^1; n^0) = \lambda U_0 \frac{\partial n^1}{\partial X} + K \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda v_{T_0} \frac{\partial n^1}{\partial \lambda} \right) \\ + \lambda(U_1 X + U_2) \frac{\partial n^0}{\partial X} + \lambda V \frac{\partial n^0}{\partial \lambda} \\ + K \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \lambda(v_{T_1} X + v_{T_2}) \frac{\partial n^0}{\partial \lambda} \right] = 0 \\ \frac{\partial n^1}{\partial \lambda}(X, 1) = 0, \quad \frac{\partial n^1}{\partial \lambda}(X, 0) = 0, \\ n^1(0, \lambda) = 0 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

$n^0$  est le terme d'ordre zéro, solution de (3.5) valable pour une aspiration  $\mathcal{A}_0$  très faible; le terme  $n^1$  d'ordre 1 donne, au 1<sup>o</sup> ordre, l'effet de l'aspiration sur le profil des titres. Nous calculerons successivement  $n^0$  (§ 3.2),  $n^1$  (§ 3.3)

et nous en déduirons l'épaisseur de diffusion locale (§ 3.4).

En l'absence d'aspiration pariétale ( $\mathcal{A}_0 = 0$ ) le titre  $N$  est indépendant de  $x$  et de  $r$  si l'on néglige, comme il a été fait ici, l'effet possible de forces extérieures ou d'un gradient de température. Les termes d'ordre 0 et 1 en  $\mathcal{A}_0$  de  $n$  sont, d'après la définition (2.15) de  $n$  respectivement des termes d'ordre 1 et 2 en  $\mathcal{A}_0$  du titre  $N$ .

### 3.2 Terme d'ordre zéro

$$\text{Posons [17]: } n^0 = n_1^0 + n_2^0, \quad (3.9)$$

où  $n_1^0$  est une solution particulière du système

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n_1^0) = 0 \\ \frac{\partial n_1^0}{\partial \lambda}(X, 1) = -1, \quad \frac{\partial n_1^0}{\partial \lambda}(X, 0) = 0, \end{aligned} \right\} (3.10)$$

et  $n_2^0$  la solution du système homogène

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n_2^0) = 0 \\ n_2^0(0, \lambda) = t(\lambda) - n_1^0(0, \lambda), \\ \frac{\partial n_2^0}{\partial \lambda}(X, 1) = \frac{\partial n_2^0}{\partial \lambda}(X, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (3.11)$$

#### 3.2.1 Solution particulière de (3.10). On pose,

$$n_1^0 = f(X) + g(\lambda) + C', \quad (3.12)$$

où  $C'$  est une constante. Il vient, en portant (3.12) dans (3.10)

$$f'(X) = \frac{K}{\lambda U_0} \frac{d}{d\lambda} [\lambda v_{T_0} g'(\lambda)] = C'' \quad (3.13)$$

où  $C''$  est une autre constante, car le 2<sup>e</sup> membre est indépendant de  $X$  et le premier de  $\lambda$ . Ainsi :

$$n_1^0 = C'' X + g(\lambda) + C', \quad (3.14)$$

qui, porté dans (3.7), devient

$$\lambda U_0 C'' = -K \frac{d}{d\lambda} [\lambda v_{T_0} g'(\lambda)] \quad (3.15)$$

$$g'(0) = 0, \quad g'(1) = -1.$$

En intégrant (3.15) de 0 à 1 et en notant que  $v_{T_0}(1) = 1$ , il vient  $C'' = K$ . La solution de (3.15)

correspondant à  $n_1^0(0) = \widetilde{n}_0(\lambda) = 0$ , s'écrit

$$n_1^0 = g(\lambda) - \widetilde{g}(\lambda) + KX, \quad (3.16)$$

avec

$$g(\lambda) = - \int_0^\lambda \frac{W(y)}{v_{T_0}(y)} dy, \quad (3.17)$$

$$W(y) = \frac{1}{y} \int_0^y s U_0(s) ds \quad [\text{voir appendice 2, (A.25)}], \quad (3.18)$$

$$\widetilde{g}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\lambda W^2 - W}{v_{T_0}} d\lambda. \quad (3.19)$$

3.2.2 *Solution de (3.11).* On cherche une solution de la forme  $n_2^0 = \Gamma(\lambda) F(X)$ . En portant dans (3.11), on voit que  $F'(X)/F(X)$  est alors fonction de  $\lambda$  seulement, donc constant. Si on désigne cette constante par  $-\omega$ , on a :

$$F(X) = \exp(-\omega X) \quad (3.20)$$

et

$$\left. \begin{aligned} -\omega \lambda U_0 \Gamma(\lambda) &= -K \frac{d}{d\lambda} [\lambda v_{T_0}(\lambda) \Gamma'(\lambda)] \\ \Gamma'(0) &= 0, \quad \Gamma'(1) = 0 \end{aligned} \right\} (3.21)$$

(3.21) est un système de Sturm-Liouville [17]. Soit  $\Omega$  l'ensemble des valeurs propres  $\omega$  de ce système ( $\omega \geq 0$ , la première étant nulle). Alors

$$n_2^0 = \sum_{\omega \in \Omega} a_\omega \cdot \exp(-\omega X) \Gamma_\omega(\lambda), \quad (3.22)$$

où pour chaque  $\omega$ , la fonction propre  $\Gamma_\omega(\lambda)$  est la solution de l'équation différentielle de (3.21) avec  $\Gamma'_\omega(1) = 0$  et par exemple  $\Gamma_\omega(1) = 1$ ; à l'exception de  $\omega = 0$  qui donne  $\Gamma_0(\lambda) = 1$ , cette fonction propre ne peut être calculée que numériquement. Quant aux valeurs propres  $\omega$ , elles pourront être calculées par la méthode de Rayleigh-Ritz [18], en utilisant un développement du type  $\Gamma_\omega(\lambda) = \sum_{j=0}^k A_j \cos(j\pi\lambda)$ . Les constantes  $a_\omega$  seront déterminées en utilisant la condition  $n_2^0(0, \lambda) = n_0(\lambda) - g(\lambda) + \widetilde{g}(\lambda)$ . Les propriétés bien connues d'orthogonalité des

fonctions propres donnent alors (en notant que d'après (3.21) pour  $\omega > 0$ ,  $\Gamma_\omega(\lambda) = 0$  et  $\Gamma_0(\lambda) = 1$ )

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_\omega &= \frac{\int_0^1 \lambda U_0 \Gamma_\omega(n_0 - g) d\lambda}{\int_0^1 \lambda U_0 \Gamma_\omega^2 d\lambda} \quad (\omega > 0). \end{aligned} \quad (3.23)$$

On a donc pour solution d'ordre zéro :

$$\begin{aligned} n^0 &= KX + g(\lambda) - \widetilde{g}(\lambda) \\ &+ \sum_{\omega > 0} a_\omega \cdot \exp(-\omega X) \cdot \Gamma_\omega(\lambda), \end{aligned} \quad (3.24)$$

le dernier terme de cette expression converge exponentiellement vers 0 quand  $X$  croît vers l'infini. On trouve ainsi le profil asymptotique réduit,

$$n^0 = KX + g(\lambda) - \widetilde{g}(\lambda), \quad (3.25)$$

d'où le titre  $N(x, r)$  par (2.15).

On peut donner à partir de (3.24), l'expression de l'épaisseur de diffusion et du Sherwood. On voit sans difficulté (pour  $\omega > 0$ ,  $\Gamma_\omega(\lambda) = 0$ ) que :

$$\frac{\delta_0(X)}{a} = \tilde{n} - n(X, 1) = \frac{\delta_0(\infty)}{a} - \sum_{\omega > 0} a_\omega e^{-\omega X}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\delta_0(\infty)}{a} = \int_0^1 \frac{\lambda W^2}{v_{T_0}} d\lambda. \quad (3.27)$$

Remarque: Si dans (3.23) on fait  $n_0 = g$ , on vérifie bien que  $a_\omega = 0$ .

### 3.3 Terme d'ordre 1

On pose de façon classique [17]

$$n^1 = n_1^1 + n_2^1, \quad (3.28)$$

où  $n_1^1$  est une solution particulière du système

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n_1^1; n^0) &= 0 \\ \frac{\partial n_1^1}{\partial \lambda}(X, 0) &= \frac{\partial n_1^1}{\partial \lambda}(X, 1) = 0. \end{aligned} \right\} (3.29)$$

et  $n_2^1$  la solution du système sans second membre

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(n_2^1) = 0, \quad n_2^1(0, \lambda) = -n_1^1(0, \lambda) \\ \frac{\partial n_2^1}{\partial \lambda}(X, 0) = \frac{\partial n_2^1}{\partial \lambda}(X, 1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

3.3.1 *Calcul de  $n_1^1$ .* On forme une solution particulière en écrivant

$$n_1^1 = q_0 + \sum_{\omega > 0} a_\omega q_\omega \quad (3.31)$$

où  $q_0$  et  $q_\omega$  sont respectivement solutions de

$$\mathcal{L}(q_0; g(\lambda) + KX) = 0, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{L}(q_\omega; \exp(-\omega X) \cdot \Gamma_\omega(\lambda)) = 0, \quad (3.33)$$

$q_0$  et  $q_\omega$  vérifiant les mêmes conditions aux limites que (3.29).

(a) *Calcul de  $q_0$ .* Cherchons ici une solution particulière du type

$$q_0 = CX^2 + j(\lambda)X + h(\lambda), \quad (3.34)$$

où  $C$  est une constante et  $j$  et  $h$  des fonctions de  $\lambda$  que nous allons déterminer. On porte (3.34) dans (3.32); on obtient pour l'équation aux dérivées partielles et pour les conditions aux limites des formes linéaires en  $X$  identiquement nulles. Annulons les termes en  $X$ ; il vient :

$$2C\lambda U_0 + \lambda K U_1 = -K \frac{d}{d\lambda} [\lambda v_{T_0} j' + \lambda v_{T_1} g'] \quad (3.35)$$

$$j'(0) = j'(1) = 0$$

En intégrant de 0 à 1 (3.35) et en utilisant  $v_{T_0}(1) = 1, v_{T_1}(1) = 0$ , on voit que  $C = K$  et ainsi,

$$j'(\lambda) = \frac{1}{v_{T_0}} \left( -2W + V + \frac{v_{T_1}}{v_{T_0}} \right), \quad (3.36)$$

donc

$$j(\lambda) = C''' + \int_0^\lambda j' dt = C''' + P(\lambda). \quad (3.37)$$

Annulons maintenant les termes indépendants

de  $X$ ; il vient :

$$\left. \begin{aligned} \lambda U_0(C''' + P) + \lambda K U_2 + \lambda V g' \\ = K \frac{d}{d\lambda} (\lambda v_{T_0} h' + v_{T_2} g') \\ h'(0) = h'(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

On détermine  $C'''$  en intégrant (3.38) de 0 à 1 et en utilisant (A.12),

$$\begin{aligned} C''' &= \int_0^1 \frac{tVW}{v_{T_0}} dt - \int_0^1 U_0 tP(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{tVW}{v_{T_0}} dt - \lambda WP + \int_0^\lambda tWj' dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Enfin, si on note

$$L(\lambda) = \int_0^\lambda tU_2(t) dt, \quad (3.40)$$

[voir en (A.26) la valeur de  $L(\lambda)$ ], il vient :

$$\left. \begin{aligned} h'(\lambda) = -\frac{1}{v_{T_0}(\lambda)} \left\{ -\frac{v_{T_2}W}{v_{T_0}} + \frac{C'''W}{K} + \frac{L}{\lambda} \right\} \\ - \frac{1}{K\lambda} \int_0^\lambda \frac{tVW}{v_{T_0}} dt + \frac{WP}{K} - \frac{1}{K\lambda} \int_0^\lambda tWj' dt \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

$h(\lambda)$  sera déterminé en choisissant  $\widetilde{h}(\lambda) = 0$  pour que  $\widetilde{q_0}(0, \lambda) = 0$ ; ainsi :

$$h(\lambda) = m(\lambda) - \widetilde{m}(\lambda), \quad (3.42)$$

avec

$$m(\lambda) = \int_0^\lambda h'(t) dt \quad (3.43)$$

$$\widetilde{m}(\lambda) = m(1) - \int_0^\lambda Wh'\lambda d\lambda. \quad (3.44)$$

Ainsi

$$q_0 = KX^2 + j(\lambda)X + m(\lambda) - \widetilde{m}(\lambda). \quad (3.45)$$

(b) *Calcul de  $q_\omega$ .* Nous allons chercher une

solution particulière de (3.33) du type

$$q_\omega = e^{-\omega X} [C_\omega(\lambda) X^2 + J_\omega(\lambda) X + H_\omega(\lambda)]. \quad (3.46)$$

Après simplification par  $e^{-\omega X}$  et identification à zéro des termes en  $X^2$ ,  $X$  et indépendants de  $X$ , on obtient successivement.

$$-\omega \lambda U_0 C_\omega + K \frac{d}{d\lambda} (\lambda \nu_{T_0} C'_\omega) = 0, \quad (3.47)$$

$$-\omega \lambda U_0 J_\omega + K \frac{d}{d\lambda} (\lambda \nu_{T_0} J'_\omega) + 2\xi \Gamma_\omega \lambda U_0 + A_\omega = 0, \quad (3.48)$$

$$-\omega \lambda U_0 H_\omega + K \frac{d}{d\lambda} (\lambda \nu_{T_0} H'_\omega) + \lambda U_0 J_\omega + B_\omega = 0, \quad (3.49)$$

où

$$A_\omega = K \frac{d}{d\lambda} (\lambda \nu_{T_1} \Gamma'_\omega) - \lambda U_1 \omega \Gamma_\omega, \quad (3.50)$$

$$B_\omega = K \frac{d}{d\lambda} (\lambda \nu_{T_2} \Gamma'_\omega) - \lambda U_2 \omega \Gamma_\omega + \lambda V \Gamma'_\omega, \quad (3.51)$$

$C'_\omega, J'_\omega, H'_\omega$  étant nuls pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$ . On a vu au § 3.2 que la solution de (3.47) est  $C_\omega = \xi \Gamma_\omega$ . (3.48) et (3.49) sont des équations de Sturm-Liouville avec second membre dont le paramètre est égal à une valeur propre. L'existence de solutions pour ces systèmes fixe successivement la valeur des constantes  $\xi$  et  $\zeta$ . On trouve ainsi :

$$J_\omega = \sum_{k \neq \omega} \frac{b_{k\omega}}{\omega - k} \Gamma_k + \zeta \Gamma_\omega, \quad (3.52)$$

$$H_\omega = \sum_{k \neq \omega} \frac{C_{k\omega}}{\omega - k} \Gamma_k, \quad (3.53)$$

avec  $[a_\omega$  étant donné par (3.23)]

$$\xi = -\frac{i_\omega}{2} \int_0^1 A_\omega \Gamma_\omega d\lambda, \quad (3.54)$$

$$\zeta = -i_\omega \int_0^1 B_\omega \Gamma_\omega d\lambda, \quad (3.55)$$

$$b_{k\omega} = i_\omega \int_0^1 A_\omega \Gamma_k d\lambda, \quad (3.56)$$

$$C_{k\omega} = i_\omega \int_0^1 \left( \lambda U_0 \frac{a_k}{\omega - k} \Gamma_k^2 + B_\omega \Gamma_k \right) d\lambda, \quad (3.57)$$

$$i_\omega = 1 / \left( \int_0^1 \lambda U_0 \Gamma_\omega^2 d\lambda \right). \quad (3.58)$$

Nous avons donc formé une solution particulière (3.31),

$$n_1^1 = KX^2 + j(\lambda) X + m(\lambda) - \widetilde{m}(\lambda) + \sum_{\omega > 0} a_\omega e^{-\omega X} [\xi \Gamma_\omega(\lambda) X^2 + J_\omega(\lambda) X + H_\omega(\lambda)]. \quad (3.59)$$

3.3.2 Calcul de  $n_1^1$  (3.59) nous donne la valeur de  $n_1^1(0, \lambda)$ ; la solution de (3.30) s'écrit alors,

$$n_1^1 = \sum_{\omega \geq 0} d_\omega e^{-\omega X} \Gamma_\omega(\lambda); \quad (3.60)$$

en utilisant les propriétés d'orthogonalité, on a

$$d_\omega = i_\omega \int_0^1 \lambda U_0 \Gamma_\omega [\widetilde{m}(\lambda) - m(\lambda)] d\lambda. \quad (3.61)$$

On remarquera que  $d_0 = 0$ ; ainsi

$$n^1 = KX^2 + j(\lambda) X + m(\lambda) - \widetilde{m}(\lambda) + \sum_{\omega > 0} a_\omega e^{-\omega X} \left[ \xi \Gamma_\omega(\lambda) X^2 + J_\omega(\lambda) X + H_\omega(\lambda) + \frac{d_\omega}{a_\omega} \Gamma_\omega(\lambda) \right]. \quad (3.62)$$

Quand  $X$  tend vers l'infini, la somme de la série tend exponentiellement vers zéro; on a donc une solution asymptotique d'ordre 1,

$$n^1 = KX^2 + j(\lambda) X + m(\lambda) - \widetilde{m}(\lambda) \quad (3.63)$$

Le titre réduit  $n$  coefficient de proportionnalité à  $\mathcal{A}_0$  du titre  $N(x, r)$ , a donc pour valeur

asymptotique,

$$n = KX + g(\lambda) - \tilde{g}(\lambda) + \mathcal{A}_0[KX^2 + j(\lambda)X + m(\lambda) - \tilde{m}(\lambda)] \quad (3.64)$$

D'où la valeur du titre  $N(x, r)$  proprement dit en substituant (3.64) dans (2.15).

Remarque. Dans le cas particulier où  $U_1 = -2U_0$  et  $U_2 = 0$ , on peut vérifier que (3.64) est identique, au 1<sup>o</sup> ordre en  $\mathcal{A}_0$ , à la forme asymptotique d'un résultat déjà établi [13]. On notera qu'alors  $v_{T_1} = 0$  (voir appendice 2) et, d'après (3.36),  $j'(\lambda) = 0$ ; ainsi dans ce cas particulier,  $n$  prend dans (3.64) la forme plus simple  $\Phi(X) + G(\lambda)$ .

### 3.4 Valeur asymptotique de l'épaisseur locale de diffusion

On voit immédiatement que, d'après (2.3), (2.15) et (2.16),

$$\frac{\delta}{a}(X) = \tilde{n} - n(X, 1) = \frac{\int_0^1 nU(X, \lambda) \lambda d\lambda}{1 - 2\mathcal{A}_0 X} - n(X, 1), \quad (3.65)$$

au 1<sup>er</sup> ordre en  $\mathcal{A}_0$ ; on voit après des calculs élémentaires, que

$$\frac{\delta}{a}(X) = \frac{\delta_0}{a} + \mathcal{A}_0 X \frac{\delta_1}{a} + \mathcal{A}_0^2 \frac{\delta_2}{a} \quad (3.66)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_0}{a} &= \int_0^1 \frac{\lambda W^2}{v_{T_0}} d\lambda \\ \frac{\delta_1}{a} &= \int_0^1 \left( \frac{2\lambda W^2}{v_{T_0}} - \lambda j'W - \frac{\lambda VW}{v_{T_0}} \right) d\lambda \\ \frac{\delta_2}{a} &= \int_0^1 \left( -\lambda h'W + \frac{WL}{v_{T_0}} \right) d\lambda \end{aligned} \right\} (3.67)$$

L'ensemble de ces résultats et ceux de l'appendice 2 montre qu'on peut calculer le champ des titres et l'épaisseur locale de diffusion à partir du profil des vitesses  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$

en utilisant seulement les opérations élémentaires de l'analyse et une hypothèse sur la valeur de  $Sc'$ .

On vérifie sur ces expressions (3.67), que  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  ne dépendent comme  $v_{T_0}$ , que du rapport  $Sc/Sc'$ .

### 4. CALCUL DU PROFIL DES TITRES ET DE L'ÉPAISSEUR DE DIFFUSION

Pour déterminer  $N(x, r)$  et  $\delta(x)$  par la méthode précédente, il faut se donner numériquement un profil universel de vitesse  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  et la valeur locale du Schmidt turbulent  $Sc'(x, r)$ . Ces données seront fournies par l'expérience.

#### 4.1 Choix d'un profil de vitesse

Nous avons choisi un profil universel de vitesse (3.1) ayant la forme analytique de celui de Reichardt [6] pour un écoulement sans aspiration, en régime turbulent avec une paroi hydrauliquement lisse,

$$u^+ = \varphi(y^+) = \frac{1}{\chi} \log(1 + \chi y^+) + E \left( 1 - e^{-y^+/\delta^+} - \frac{y^+}{\delta^+} e^{-by^+} \right). \quad (4.1)$$

Ce profil (4.1) se réduit, quand  $y^+$  est grand ( $y^+ > 30$ ), au profil de Prandtl:

$$u^+ = \left( \frac{\log \chi}{\chi} + E \right) + \frac{1}{\chi} \log y^+ = A + B \log y^+ \quad (4.2)$$

Weissberg [19] a étudié expérimentalement l'influence de l'aspiration sur le profil des vitesses. Quand  $v^+ > 0$ , ses mesures ne peuvent être représentées par un profil universel à coefficients indépendants de  $x$ , que loin du début de la partie diffusante. Pour des Reynolds compris entre 25000 et 63000 et des taux d'aspiration variant entre 0 et  $5 \cdot 10^{-3}$ , il donne, quand  $y^+ > 30$ ,

$$\left. \begin{aligned} A &= 3,07 + 63,5 v^+ \\ B &= 2,93 - 22,48 v^+ \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Nous utiliserons d'abord (4.3) et (4.2) pour calculer les paramètres  $\chi$  et  $E$ : le domaine de validité de nos calculs sera donc, en principe, celui de (4.3) (nous avons fait les calculs pour  $20000 < Re < 80000$ ). Nous avons ensuite déterminé  $b$  et  $\delta^+$  en écrivant que la viscosité turbulente est du troisième ordre en  $y^+$ , condition obtenue en appliquant l'équation de continuité aux termes de turbulence (voir aussi [9]):

$$v'/v = Cte y^{+3} + \dots, \quad (4.4)$$

et nous avons porté (4.4) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\left(1 + \frac{v'}{v}\right) \frac{du^+}{dy^+} + u^+ v^+ = 1, \quad (4.5)$$

valable dans la sous-couche visqueuse [19]. On trouve alors, approximativement

$$\left. \begin{aligned} \delta^+(v^+) &= \lambda 14 + 180 v^+ \\ b(v^+) &= 0,42 + 5,4 v^+ \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

On pourra comparer sur les Figs. 3 et 4 le profil (4.1) ainsi déterminé avec les résultats de l'étude

expérimentale des champs des vitesses faites par Coantic [20] pour  $A_0 = 0$ , et Weissberg [19]. L'accord paraît satisfaisant.

D'autres choix de profil  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  sont, bien entendu, possibles [20-22]. Nous avons choisi celui de Reichardt en raison de sa forme analytique simple et continue.

#### 4.2 Choix du Schmidt turbulent $Sc'$

On admet généralement que  $Sc'(x, r)$  ne dépend pas de l'abscisse  $x$  mais seulement de la distance à l'axe  $r$ . On a très peu de données expérimentales sur  $Sc'$  et sa dépendance en  $r$  [23]. On peut admettre qu'il est égal au Prandtl turbulent ( $Sc' = Pr'$ ). Kestin et Richardson [24] ont passé en revue l'ensemble des mesures de  $Pr'$ : la loi de  $Pr'$  en fonction de  $r/a$  ne paraît pas clairement établie mais on a toujours  $0,6 \leq Pr' \leq 0,9$ . A défaut d'une donnée empirique plus précise, nous admettons ici une valeur unique intermédiaire  $Pr' = 0,75$  quel que soit  $\lambda$ . Comme pour le gaz choisi (Argon)  $Pr = Sc$  sont aussi voisins de 0,75, nous admettrons dans la suite de ce travail que  $Sc' = Sc = 0,75$ . Bien entendu,

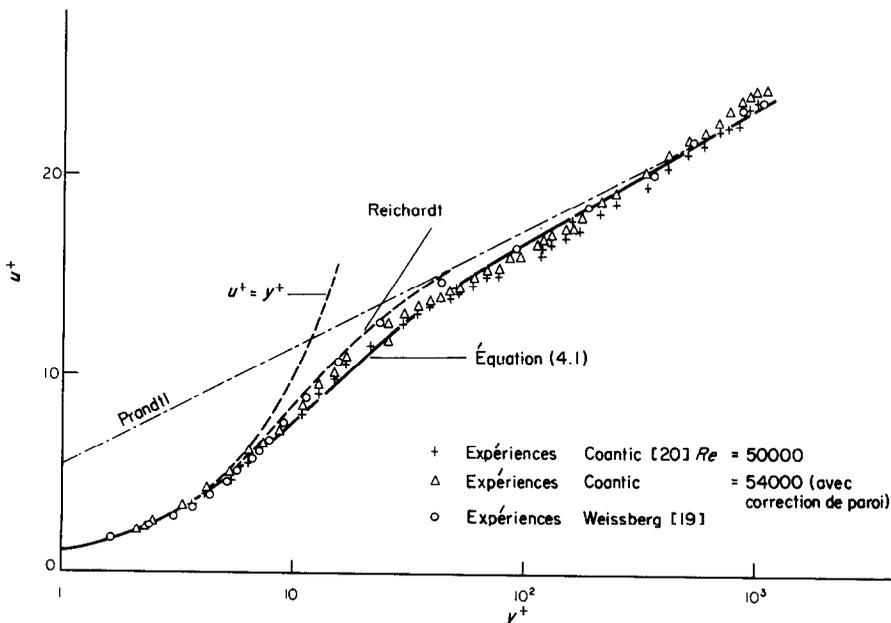


FIG. 3. Profils universels de vitesse (aspiration nulle).

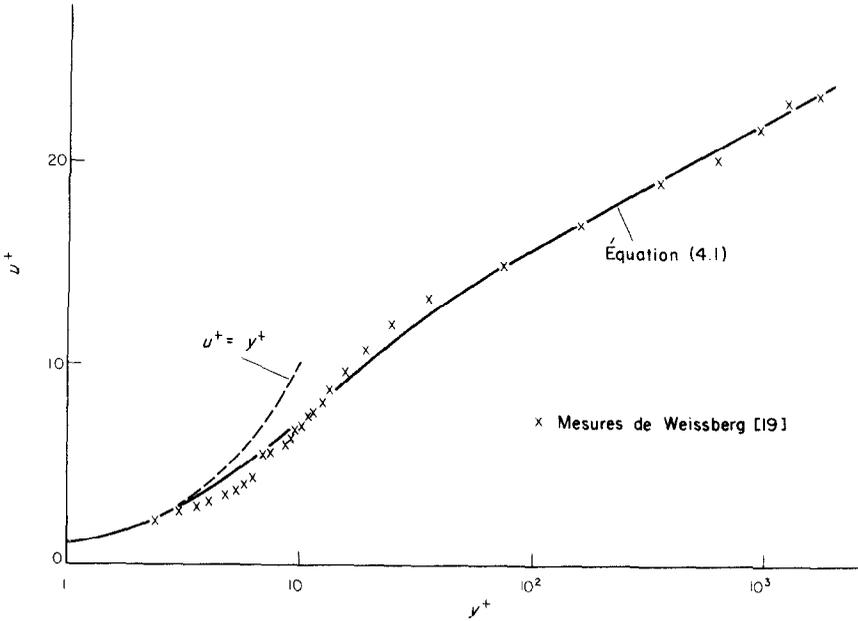


FIG. 4. Profil universel de vitesse au taux d'aspiration  $\mathcal{A}_0 = 0,65 \cdot 10^{-3}$  ( $w^+ = 1,3 \cdot 10^{-2}$ ).

si, par la suite l'expérience venait à établir un profil  $Pr'(\lambda)$  ou  $Sc'(\lambda)$ , la méthode proposée ici permet de mener les calculs numériques jusqu'au bout. On peut d'ailleurs voir sur la Fig. 5 l'influence importante d'une variation de  $Sc'$  sur le Sherwood.

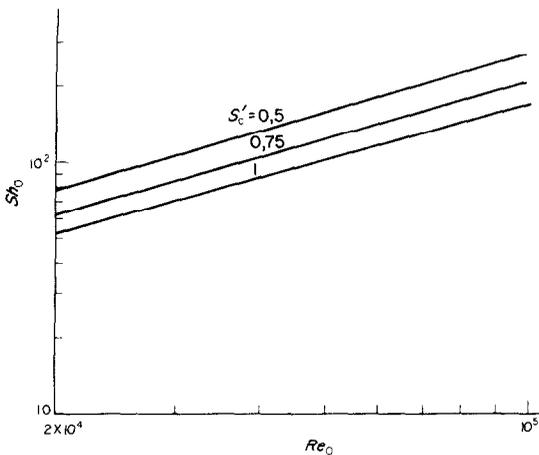


FIG. 5. Valeurs du Sherwood pour plusieurs Schmidt turbulents.

### 4.3 Champ des titres

Quand on étudie le champ des titres, il faut distinguer la zone d'établissement du profil radial des titres, située près de l'entrée de la partie diffusante, et la zone où ce profil radial a sa valeur asymptotique.

4.3.1 *Etablissement du profil radial des titres.* Pour faire cette étude, il est normal de faire coïncider l'origine  $x = 0$  avec le début de la partie diffusante. Comme on l'a vu en posant les conditions aux limites, il est naturel de considérer à l'origine un profil uniforme.

Nous ne présentons ici sur la Fig. 6 que les résultats des calculs faits pour  $Re_0 = 40\,000$ , dans l'approximation (3.24) d'ordre 0 pour  $n$  et donc d'ordre 1 en  $\mathcal{A}_0$  pour le titre  $N$ . Ce profil atteint rapidement la valeur asymptotique d'un profil établi, pratiquement dès  $X = x/a = 20$  rayons. On pourra comparer qualitativement ces résultats à ceux calculés par Deissler [13] en transfert de chaleur sans aspiration.

Remarque. On aurait pu préciser ces résultats en faisant aussi le calcul de  $n^1$ , à partir de (3.62); mais cela n'aurait pas de signification physique

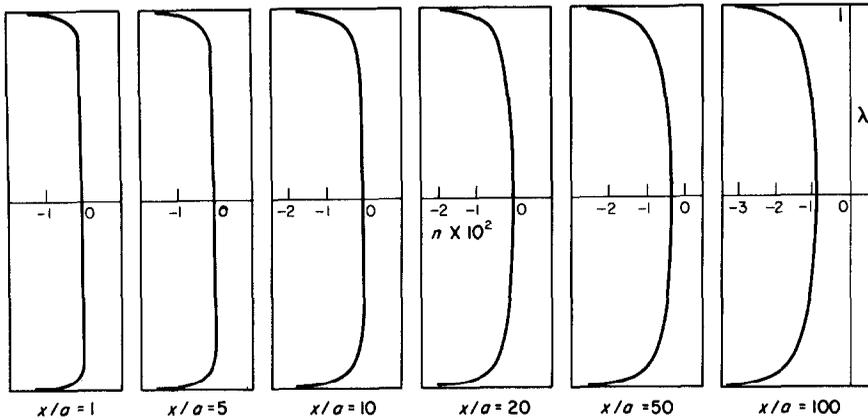


FIG. 6. Etablissement du profil radial des titres d'après (3.24), pour  $Re_0 = 40000$ .

car, d'après les mesures de Weissberg [19] pour  $v^+ > 0$ , le profil universel  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  n'est pas établi près de l'entrée de la partie diffusante. Comme cette modification du profil des vitesses intervient à partir de l'approximation d'ordre 1, elle entacherait celle-ci d'erreur.

$X = 0$  (amincissement de la couche limite de diffusion): pour  $X = 50$  il est masqué par influence de la baisse du Reynolds local et celle de l'appauvrissement du mélange en élément léger, ces deux phénomènes croissant avec  $X$  (si  $\mathcal{A}_0 > 0$ ).

4.3.2 *Etude du profil asymptotique.* Nous supposons maintenant que l'origine  $x = 0$  est prise loin du début de la partie diffusante; le profil des titres  $N(x, r)$  est alors donné par l'expression (3.64) de  $n(X, \lambda)$ . Nous avons représenté, sur la Fig. 7,  $n(X, \lambda)$  pour  $Re_0 = 40000$ ,  $X = x/a = 0$  et 50 rayons et  $\mathcal{A}_0 = 0$  et  $2.10^{-3}$ .

4.4 *Epaisseur de diffusion et nombre de Sherwood*  
 Comme pour le champ des titres, nous distinguons la zone d'établissement de l'épaisseur de diffusion, et la zone où elle a sa valeur asymptotique.

L'effet de l'aspiration est très net à l'origine

4.4.1 *Etablissement de l'épaisseur de diffusion.* Nous ferons, comme au § 4.3.1, coïncider l'origine avec le début de la partie diffusante.

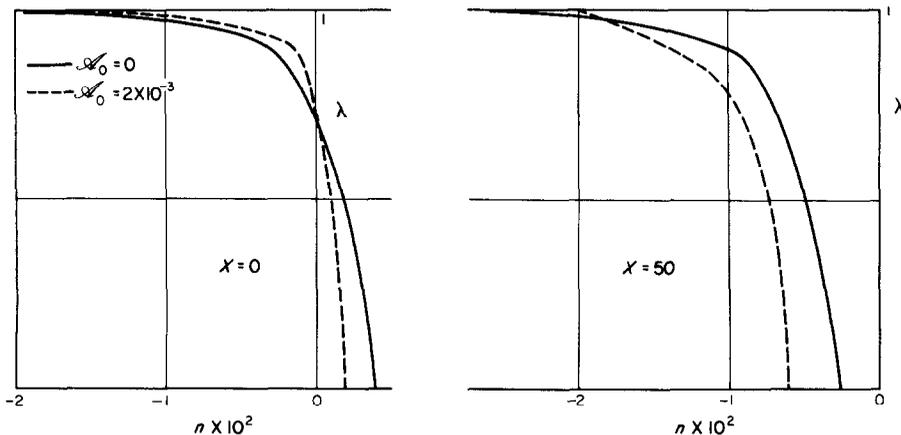


FIG. 7. Influence de l'aspiration sur le profil asymptotique des titres ( $Re_0 = 40000$ ).

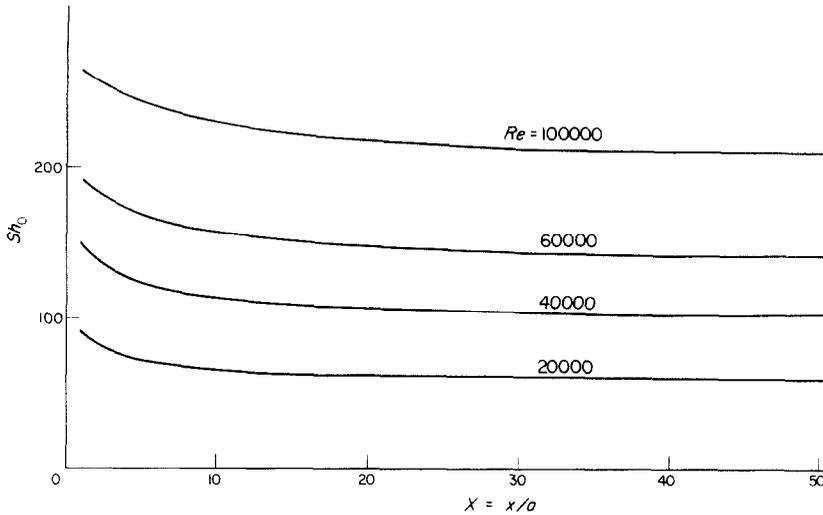


FIG. 8. Etablissement du Sherwood pour différents Reynolds.

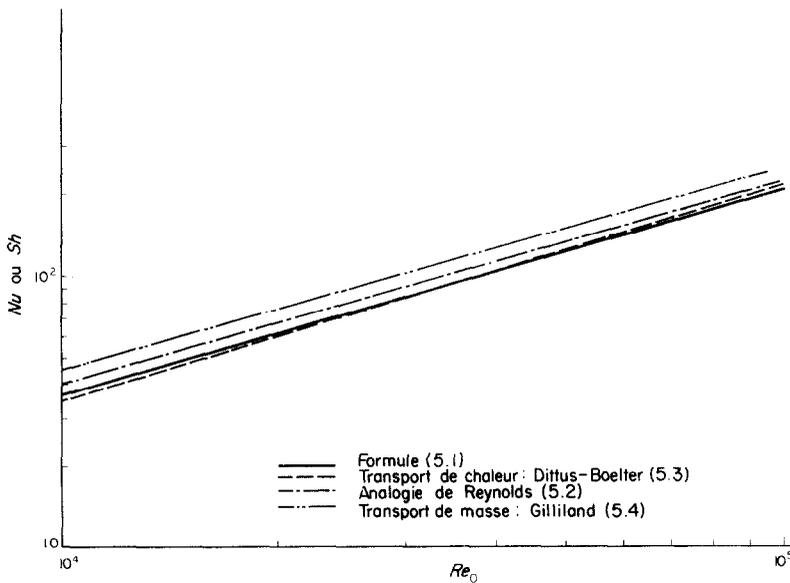


FIG. 9. Comparaison du Sherwood calculé par (5.1) avec divers résultats.

Les calculs sont faits par la formule (3.26), dans l'approximation d'ordre 0 pour  $\delta/a(X)$ . Nous représentons ici sur la Fig. 8 la dépendance de  $Sh_0(x/2a) = 2a/\delta_0(X)$  en  $x/a$  variant de 0 à 100, pour des Reynolds compris entre 20000 et 100000. On voit que  $Sh_0$  décroît très vite et atteint sa valeur limite à 4 pour cent près au

bout d'environ 20 rayons, cette distance augmentant lentement avec le Reynolds (20 rayons, pour  $Re_0 = 20000$ , 21,5 rayons pour  $Re_0 = 100000$ ). Ces résultats sont qualitativement comparables à ceux de Deissler [13] en transfert de chaleur.

4.4.2 Valeur asymptotique de l'épaisseur de

*diffusion.* D'après (3.67), avec les données (4.1) et (4.3) (l'origine  $x = 0$  étant choisie loin du début de la partie diffusante), on a, au premier ordre en  $A_0$ ,

$$\frac{\delta}{2a}(x) = \frac{\delta_0}{2a} + \frac{\delta_1}{2a} A_0 \frac{x}{a} + \frac{\delta_2}{2a} A_0, \quad (4.7)$$

avec les valeurs numériques, rassemblées dans le Tableau 1, des coefficients  $\delta_0/2a$ ,  $\delta_1/2a$ ,  $\delta_2/2a$  calculées par notre programme Fortran, d'après (3.67).

Tableau 1. ( $Sc = Sc'$ )

$Re_0$	$10^3 \delta_0/2a$	$10^3 \delta_1/2a$	$\delta_2/2a$
20 000	15,98	22,19	-1,108
30 000	11,98	17,40	-1,011
40 000	9,693	14,53	-0,926
50 000	8,184	12,55	-0,847
60 000	7,108	11,07	-0,774
70 000	6,301	9,897	-0,707
80 000	5,672	8,939	-0,648

### 5. DISCUSSION

#### 5.1 Champ des titres

Il existe très peu de données expérimentales sur le champ des titres d'un mélange gazeux binaire en écoulement turbulent dans un tube cylindrique avec aspiration pariétale. Il serait donc intéressant de comparer les profils de température obtenus expérimentalement par Eléna [16] en utilisant l'analogie entre champ des titres et des températures. Cependant l'analogie n'est complète que si le flux de chaleur à travers la paroi est uniforme, ce qui n'est pas le cas des expériences d'Eléna, où la température de paroi est uniforme.

#### 5.2 Comparaison avec les valeurs connues de l'épaisseur de diffusion

Nous allons d'abord discuter les valeurs numériques calculées (Tableau 1) des trois termes  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ . Nous proposerons ensuite une méthode de mesure de  $\delta$ (§ 6).

##### 5.2.1 Epaisseur de diffusion $\delta_0$ aux aspirations

*très faibles.* Les valeurs numériques ainsi calculées du premier terme  $\delta_0/2a$  sont assez bien représentées, à moins de 2 pour cent près pour  $20000 \leq Re_0 \leq 80000$  par (Fig. 9)

$$Sh_0 = \frac{2a}{\delta_0} = 0,0385 Re_0^{0,746} \quad (5.1)$$

qui diffère à moins de 1 pour cent des valeurs calculées dans [5] avec un profil de Pai [25].

Avec notre choix  $Sc = Sc'$ , l'analogie de Reynolds est valable [2]. On peut donc écrire,

$$Sh_0 = \frac{1}{2} Re_0 Cf_0 = 0,0395 Re_0^{0,75}, \quad (5.2)$$

où  $Cf_0$  est donné par la formule de Blasius. La formule (5.2) donne des résultats supérieurs de 6 pour cent à (5.1) (Fig. 9).

La similitude entre les équations du champ des titres et du champ des températures suggère aussi la comparaison de (5.1) avec le Nusselt, pour lequel il existe de nombreuses données expérimentales; celles-ci sont bien représentées par la formule empirique de Dittus et Boelter [3]

$$Nu_0 = 0,0217 Re_0^{0,83} \quad (\text{pour } Sc = 0,75). \quad (5.3)$$

Les formules (5.3) et (5.1) sont en excellent accord numérique pour  $20000 < Re < 80000$  (cf. Fig. 9).

Nous représentons aussi, Fig. 9, la loi empirique de Gilliland [26] pour le transport de masse (avec  $Sc = 0,75$ ), souvent utilisée en pratique pour la valeur de l'épaisseur de diffusion [27]

$$Sh_0 = 0,0201 Re_0^{0,83}. \quad (5.4)$$

On voit sur la Fig. 9 que cette loi donne des valeurs du Sherwood nettement supérieures (25 pour cent) à celles prévues par (5.1), (5.2) ou (5.3). Mais il convient de remarquer que dans les expériences de Gilliland, le transport de masse est lié à un phénomène d'évaporation d'un film sur une paroi et non à un transport de masse à travers une paroi poreuse.

Remarque. Influence de la valeur de  $Sc$ . La valeur du Schmidt est, pour les gaz, voisine de  $Sc = 0,75$ . Il est donc intéressant de calculer  $Sh_0$  pour un intervalle de valeurs de  $Sc$  assez étroit,  $0,5 \leq Sc \leq 1,2$ . En conservant à  $Sc'$  la valeur 0,75 adoptée ici, on trouve

$$Sh_0 = 0,046 Sc^{0,62} Re^{0,746} \quad (5.5)$$

Dans (5.5), l'exposant 0,62 de  $Sc$  est supérieur à la valeur 0,4 admise d'habitude pour l'exposant de  $Pr$  [3] car cette dernière correspond à une gamme étendue ( $0,5 \leq Pr \leq 100$ ). On pourra d'ailleurs comparer la valeur 0,62 avec les valeurs 0,60 (obtenue à partir des calculs de [5]), 0,786 donnée par Nusselt [1] pour les gaz ou 0,50 obtenue par Brun-Ribaud [1, 28]. Enfin il y a très vraisemblablement une relation entre  $Sc$  et  $Sc'$  [23, 24]: on ne peut alors supposer  $Sc'$  fixe quand  $Sc$  varie.

5.2.2 Terme  $\delta_1$  proportionnel au facteur de partage local  $\theta_x = 2\mathcal{A}_0 x/a$ . Le terme en  $\delta_1$  de (4.7) est proportionnel au facteur de partage local  $\theta_x = 2\mathcal{A}_0 x/a$ . Lorsque  $\theta_x$  croît,  $Re_0$  étant fixe,  $Re(x)$  décroît, et d'après (5.1) la contribution à l'épaisseur de diffusion croît puisque son coefficient de proportionnalité à  $\theta_x$  est positif (cf. Tableau 1). C'est bien ce qu'on observe. De plus, avec une erreur inférieure à 1 pour cent, on voit que:

$$\frac{\delta'}{2a}(x) = \frac{\delta_0}{2a} + \mathcal{A}_0 \frac{x}{a} \frac{\delta_1}{2a} \simeq \frac{\delta_0}{2a}(Re), \quad (5.6)$$

où  $\delta_0/2a(Re)$  est obtenu en remplaçant dans (5.1)  $Re_0$  par  $Re = Re(x) < Re_0$ ,

$$Re(x) = Re_0 \left( 1 - 2\mathcal{A}_0 \frac{x}{a} \right) \quad (5.7)$$

Remarque. Ce résultat reste valable si  $Sc \neq Sc'$ ,  $Sc$  restant du même ordre de grandeur que  $Sc'$ .

5.2.3 Terme  $\delta_2$  proportionnel au seul taux d'aspiration  $\mathcal{A}_0$ . Comme  $\delta_2/2a$  est négatif, ce terme contribue à diminuer l'épaisseur de diffusion. Il est donc antagoniste de l'effet précédent; et on voit qu'il le compense exacte-

ment à une distance croissante de 50 à 72 rayons quand  $Re_0$  croît de 20000 à 80000.

Il est intéressant de comparer le nombre de Sherwood local avec aspiration  $Sh(x) = 2a/\delta(x)$  avec le Sherwood correspondant à (5.6)  $Sh' = 2a/\delta'$  qui, d'après le § 5.2.2, est très proche du Sherwood sans aspiration calculé avec le Reynolds local. Au 1er ordre en  $\mathcal{A}_0$ ,

$$Sh(x) - Sh'(x) \simeq \frac{\delta_2/2a}{(\delta_0/2a)^2} \frac{Ra}{Re_0} \simeq 0,25 Ra, \quad (5.8)$$

la deuxième égalité étant valable pour  $Re_0 > 30000$ . Ce résultat n'est pas très éloigné de celui de Coantic [11] obtenu à partir de la théorie du film

$$Sh - Sh' = 0,30 Ra. \quad (5.9)$$

On peut aussi comparer (puisque  $Sc = Sc'$ ) la valeur de cette différence (5.8) à celle obtenue en remplaçant  $Sh$  par  $Re C_f/2$  dans les mesures de Weissberg [19]; la valeur trouvée dépend de  $Re$  et est centrée sur

$$Sh - Sh' = 0,265 Ra. \quad (5.10)$$

Les dépendances de  $(Sh - Sh')$  en  $Ra$  sont représentées sur la Fig. 10 où l'on a également reporté les mesures d'Eléna [16] en transfert thermique.

Remarque. Contrairement à ce que prévoit Coantic [11], (5.8) semble à peu près indépendant de  $Sc$  quand  $Sc$  reste voisin de  $Sc'$ .

5.2.4 Formule de calcul du Sherwood asymptotique local. Si nous substituons dans (4.7) les expressions (5.5), (5.6) et (5.8), nous pouvons proposer la formule

$$Sh(x) = \frac{2a}{\delta(x)} = 0,046 Sc^{0,62} Re(x)^{0,746} + 0,25 Ra. \quad (5.11)$$

## 6. MESURE DIRECTE DE L'ÉPAISSEUR DE DIFFUSION

### 6.1 Principe de la méthode de mesure

Nous allons exposer une méthode de mesure

déjà employée par Mordchelles [10, 29] qui permet d'atteindre directement la valeur asymptotique de  $\delta$  à partir d'une mesure d'enrichissement en élément léger d'un mélange gazeux binaire isotopique par diffusion à travers une paroi poreuse.

On démontre [10, 11] en effet, que  $\delta$  est liée par

$$\delta(x) = \frac{\mathcal{D}_{12}}{V_a} [1 - Z(x)], \quad (6.1)$$

au rendement de mélange [8] local  $Z(x)$  défini par

$$Z(x) = \frac{N_s(x) - \tilde{N}(x)}{N_s(x) - N(x, a)} \quad (6.2)$$

et l'on démontre que  $Z(x)$  est relié à la différence ( $N_p - N_w$ ) entre le titre  $N_p$  de la fraction enrichie et le titre  $N_w$  de la fraction appauvrie en élément léger par diffusion à travers la paroi du cylindre poreux, par

$$\overline{ZS} = \frac{(N_p - N_w)[1 + \varepsilon^*(1 - N_p)]}{\varepsilon^* N_p (1 - N_p)} \left( \theta / \log \frac{1}{1 - \theta} \right) \quad (6.3)$$

où  $\theta = D'/D$  est le facteur de partage et où la moyenne  $\overline{ZS}$  peut s'écrire  $\overline{ZS} \approx \overline{Z(x)} S(P, P')$ , car la différence entre les pressions  $P$  à l'entrée et  $P''$  à la sortie amont (Fig. 10) est faible devant  $P$ . On détermine  $S$  pour chaque couple  $P, P'$  (ce qui fixe  $D'$ ) en extrapolant à  $\theta = 0 (Re = \infty, S = 1)$  les valeurs obtenues de  $\overline{Z(x)}$ .  $S$ .

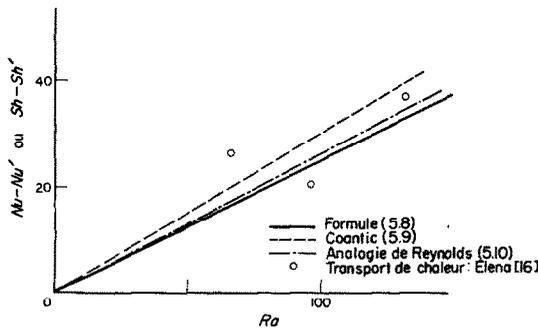


FIG. 10. Effet de l'aspiration pariétale sur le nombre de Sherwood.

Pour connaître la valeur asymptotique de  $\delta$  il suffit donc de mesurer  $N_p, N_w$  et les débits  $D$  et  $D'$ , d'où l'on tirera aussi une valeur moyenne de  $Re$  et de  $Ra$ . Si l'on utilise un tube assez long avec des taux d'aspiration faibles (de l'ordre de  $10^{-3}$ ), la valeur de  $\overline{Z}$  se confond avec la valeur asymptotique de  $Z$  pour  $x$  grand, aux erreurs d'expérience près.

### 6.2 Dispositif de mesure

Le gaz utilisé est le mélange naturel des isotopes de l'Argon ( $M_1 = 36, M_2 = 40$ ). Le principe de l'installation de mesure est représenté Fig. 11. La cellule de diffusion divisée par

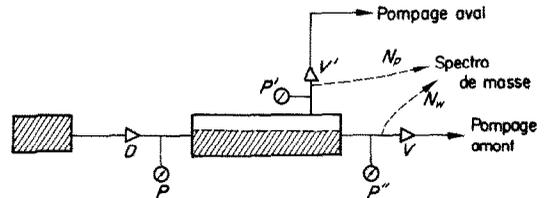


FIG. 11. Principe de l'appareil de mesure.

un tube poreux à perméabilité constante sur toute sa longueur en compartiments amont (hauchuré) et aval, est alimentée à la pression  $P$  par l'Argon qui traverse un débitmètre à tuyère sonique  $D$ . Le débit d'Argon est réglé par la vanne sonique de débit  $V$ . L'argon enrichi en masse 36 sort de la cellule à une pression  $P' \ll P$ ; la valeur du débit  $D'$  diffusé à la pression  $P'$  est réglée par la vanne sonique de débit  $V'$  et mesurée par la tuyère  $D$  quand on ferme la vanne  $V$ .

Les titres  $N_p$  et  $N_w$  sont mesurés avec un spectromètre de masse sur de faibles quantités de gaz prélevées en amont de  $V'$  et de  $V$ ; la mesure des débits  $D$  et  $D'$  donne  $Re_0 = 2D/\pi a v$  et  $\theta = D'/D$  d'où  $Re(x) = Re_0(1 - \theta/2)$  et  $Ra = Re_0 \theta a/2l$ .

### 6.3 Comparaison des valeurs expérimentales de $\delta/2a$ avec les valeurs calculées

Nous donnons Fig. 12 le résultat des mesures de  $\delta/2a$  faites pour  $Ra = 10, Re_0$  variant entre 20000 et 100000. L'accord avec les valeurs

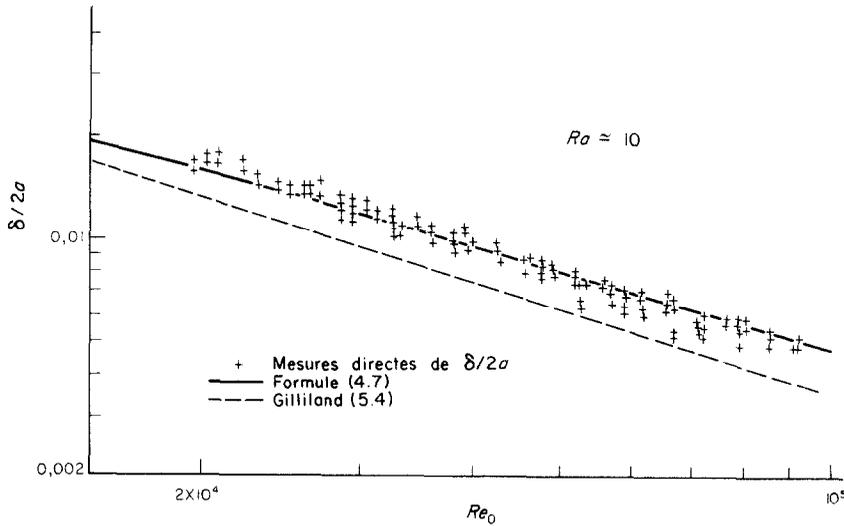


FIG. 12. Comparaison des mesures directes de l'épaisseur de diffusion avec la présente théorie.

calculées par (4.7) est bon, compte-tenu de l'erreur systématique faite sur la détermination de  $S$  par extrapolation. On notera que la formule empirique de Gilliland (5.4) donne des valeurs de  $\delta/2a$  nettement inférieures à celles mesurées ici.

L'effet de l'aspiration est faible et difficile à mettre en évidence; nous avons étudié les résultats d'enrichissements obtenus avec une dizaine de tubes poreux de perméabilités différentes et plusieurs valeurs de  $P - P'$ ;  $Ra$  varie ainsi entre 5 et 35. Nous avons obtenue 68 estimations du Sherwood pour  $Re_0 = 50000$ . On trouve

$$Sh - Sh' = (0,28 \pm 0,10) Ra, \quad (6.4)$$

le coefficient de corrélation étant de 0,6.

On notera que (6.4) est compatible avec les formules (5.8)–(5.10), ainsi qu'avec les mesures du Nusselt faites par Eléna.

#### REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement A. Lejeune et Mlle C. Durand pour l'obtention des résultats expérimentaux et V. Besson pour la mise au point des programmes de calcul et pour l'exécution des planches.

#### REFERENCES

1. G. RIBAUD et E. BRUN, La convection forcée de la chaleur en régime d'écoulement turbulent, Mém. Sc. Phys. XLVI, Gauthier-Villars, Paris (1942).
2. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York (1960).
3. MAX JACOB, *Heat Transfer*, Vol. 1. John Wiley, New York (1959).
4. R. R. HUNZIKER, Heat transfer in turbulent pipe flow, *J. Franklin Inst.* **265**, 205–225 (1958).
5. R. D. HABERSTROH et L. V. BALDWIN, Application of a simplified velocity profile to the prediction of the pipe-flow heat transfer, *J. Heat Transfer* **90**, 191–200 (1968).
6. H. REICHARDT, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **31**, 208–219 (1951).
7. S. W. YUAN, Cooling by protective fluid films, *Turbulent Flows and Heat Transfer*. Princeton University Press, New Jersey (1959).
8. D. MASSIGNON, Séparation des isotopes par diffusion gazeuse, *J. Chim. Phys.* **60**, 267–276 (1963).
9. M. COANTIC, Contribution à l'étude de la structure de la turbulence dans une conduite de section circulaire, Thèse Marseille (1966).
10. G. MORDCHELLES-REGNIER, Analogie entre transport de masse et transport de quantité de mouvement dans un écoulement avec aspiration pariétale. *C.R. Acad. Sci. Paris* **254**, 2931–2933 (1962).
11. M. COANTIC, Calcul du rendement de mélange lors de la séparation d'un mélange binaire par diffusion gazeuse. *C.R. Acad. Sci. Paris* **261**, 1169–1171 (1965).
12. R. B. BIRD, W. E. STEWART and E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*. John Wiley, New York (1962).

13. R. G. DEISSLER, Analysis of turbulent heat transfer and flow in the entrance regions of smooth passages, *NACA TN 3016* (1953).
14. R. JACQUES, D. MASSIGNON, A. ROSENGARD et SOUBBARAMAYER, Convection de masse turbulente dans un tube avec aspiration pariétale, *C.R. Acad. Sci. Paris 268A*, 113-116 (1969).
15. SOUBBARAMAYER, Convection de masse laminaire dans un tube poreux avec aspiration pariétale, *C.R. Acad. Sci. Paris 267A*, 904-906 (1968).
16. M. ELENA, Etude dynamique et thermique d'un écoulement turbulent en conduite avec aspiration à la paroi. Thèse Marseille (1967).
17. M. PARODI, *Mathématiques Appliquées à l'Art de l'Ingénieur*. Tome 4, Sedes, Paris (1966).
18. T. VOGEL, Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique Mathématique, CNRS, Paris (1963).
19. H. L. WEISSBERG, Velocity profiles and friction factors for turbulent pipe flow with uniform wall suction, K-1264 Union Carbide Nuclear Company, Oak Ridge (1956).
20. M. COANTIC, Evolution, en fonction du nombre de Reynolds, de la distribution des vitesses moyennes et turbulentes dans une conduite, *C.R. Acad. Sci. Paris 264A*, 849-852 (1967).
21. A. FAVRE, R. DUMAS, E. VEROLLET et M. COANTIC, Couche limite turbulente sur paroi poreuse avec aspiration. *J. Méc.* 5, 1-28 (1966).
22. S. W. YUAN et E. W. BROGEN, Turbulent flow in circular pipe with porous wall. *Physics Fluids* 4, 368-372 (1961).
23. L. B. GOLDMAN et J. M. MARCHELLO, Turbulent Schmidt numbers *Int. J. Heat Mass Transfer* 12, 797-802 (1969).
24. J. KESTIN et P. D. RICHARDSON, Heat transfer across turbulent incompressible boundary layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 147-189 (1963).
25. S. I. PAI, On turbulent flow in circular pipe, *J. Franklin Inst.* 256, 337-352 (1953).
26. E. R. GILLILAND et T. K. SHERWOOD, Diffusion of vapors into air streams, *Ind. Engng Chem.* 26, 516-523 (1934).
27. T. K. SHERWOOD et R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*. McGraw-Hill, New York (1952).
28. E. A. BRUN, Introduction à l'étude de la couche limite, Gauthier-Villars, Paris (1955).
29. G. MORDCHELLES-REGNIER, Contribution à l'étude de la convection de masse dans un tube avec aspiration pariétale. Thèse Paris (1962).

APPENDICES

1. Diffusion radiale  $\mathcal{D}_{12} \partial N / \partial r$  et diffusion longitudinale  $\mathcal{D}_{12} \partial N / \partial x$

La diffusion radiale est comme  $|\partial N / \partial r|$ , maximale sur la paroi; d'après (2.8), on a

$$\mathcal{D}_{12} \frac{\partial N}{\partial r}(x, a) = V_a \varepsilon^* SN(x, a) [1 - N(x, a)] \quad (A.1)$$

Pour estimer la diffusion longitudinale, nous calculons  $d\tilde{N}/dx$ , en écrivant le bilan en élément léger dans une tranche cylindrique d'épaisseur  $dx$  [8],

$$\pi a^2 \bar{u}(x) d\tilde{N} = (N_s - \tilde{N}) V_a 2\pi a dx. \quad (A.2)$$

En tenant compte des expressions (2.7) et (6.2) des rendements  $S$  et de  $Z$ , il vient, au 1er ordre en  $\varepsilon^*$ :

$$\frac{d\tilde{N}}{dx} = V_a \varepsilon^* SN_s (1 - N_s) \frac{2Z}{a\bar{u}(x)} \approx \mathcal{D}_{12} \left. \frac{\partial N}{\partial r}(x, a) \right| \frac{2Z}{a\bar{u}(x)}, \quad (A.3)$$

d'où, puisque  $Z \leq 1$ ,

$$\frac{d\tilde{N}}{dx} \leq \frac{4}{Sc Re} \left. \frac{\partial N}{\partial r} \right|_{\max}. \quad (A.4)$$

Cette inégalité montre que l'on peut négliger la diffusion longitudinale (quand  $r \neq 0$ ) pour les Reynolds envisagés ici ( $Re > 20000$ ).

2. Etude du champ des vitesses et de la viscosité turbulente

2.1 Calcul de la vitesse axiale  $U(X, \lambda)$

L'utilisation du profil universel  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  nécessite la connaissance du coefficient de frottement avec et sans aspiration. Ce dernier peut être donné par la loi de Blasius ( $20000 \leq Re \leq 80000$ ). Pour calculer le coefficient de frottement local avec aspiration, on peut prendre

$$Cf(Re, \mathcal{A}) = Cf(Re, 0)(1 + \gamma \mathcal{A}) = Cf(Re, 0)(1 + 116 \mathcal{A}), \quad (A.5)$$

formule établie par Weissberg [19] à partir des mesures de pression.

La conservation de la masse donne:

$$\bar{u} = \bar{u}_0(1 - 2X \mathcal{A}_0), \quad Re = Re_0(1 - 2X \mathcal{A}_0). \quad (A.6)$$

Notons (avec  $y_0^+ = y^+(1 - \lambda)$ ) respectivement  $\varphi(y_0^+)$ ,  $\varphi'_i(y_0^+)$ ,  $\varphi'_v(y_0^+)$  les valeurs de  $\varphi(y^+, v^+)$ ,  $\partial \varphi / \partial y^+$ ,  $\partial \varphi / \partial v^+$  pour  $y^+ = y_0^+$  et  $v^+ = 0$ . On obtient au premier ordre en  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{A}_0 X$ , en introduisant (A.5) et (A.6) dans  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$ ,

$$U(X, \lambda) = U_0(\lambda) + U_1(\lambda) \mathcal{A}_0 X + U_2(\lambda) \mathcal{A}_0 \quad (A.7)$$

avec

$$U_0(\lambda) = 2 \sqrt{\left(\frac{Cf_0}{2}\right)} \varphi(y_0^+), \quad (A.8)$$

$$U_1(\lambda) = 2 \sqrt{\left(\frac{Cf_0}{2}\right)} \alpha [y_0^+ \varphi'_i(y_0^+) + \varphi(y_0^+)] \quad (A.9)$$

$$U_2(\lambda) = 2 \sqrt{\left(\frac{Cf_0}{2}\right)} \left[ \sqrt{\frac{2}{Cf_0}} \varphi'_i(y_0^+) + \beta \varphi'_i(y_0^+) y_0^+ + \beta \varphi(y_0^+) \right] \quad (A.10)$$

$$\alpha = - \left( 2 + \frac{Re_0 d Cf_0}{Cf_0 d Re_0} \right), \quad \beta = \frac{\gamma}{2} = 58, \quad (A.11)$$

$\alpha = -1,75$  pour la loi de Blasius.

On voit immédiatement en portant (A.7) dans (A.6) que :

$$\int_0^1 U_0(\lambda) \lambda d\lambda = 1, \quad \int_0^1 U_1(\lambda) \lambda d\lambda = -2, \quad \int_0^1 U_2(\lambda) \lambda d\lambda = 0. \quad (A.12)$$

2.2 Calcul de la vitesse radiale  $V(X, \lambda)$

En coordonnées cylindriques, s'il n'y a pas de rotation d'ensemble, l'équation de continuité s'écrit, avec les grandeurs sans dimensions définies dans cet article

$$\frac{\partial(\lambda V)}{\partial \lambda} + \lambda U_1(\lambda) = 0. \quad (A.13)$$

La constante d'intégration sera déterminée par  $V = 0$  pour  $\lambda = 0$ , donc :

$$V = - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda t U_1(t) dt. \quad (A.14)$$

Au premier ordre en  $\mathcal{A}_0$ ,  $V$  est indépendant de  $X$ . En utilisant (A.9), on trouve :

$$V = \frac{2 \sqrt{(Cf_0/2)}}{\lambda y^*} \alpha \left\{ y^* \varphi(y_0^+) \lambda(1 - \lambda) + \frac{1}{y^*} [\Phi_1(y_0^+) - \Phi_1(y^*)] \right\} \quad (A.15)$$

où

$$\Phi_1(y) = \int_0^y t \varphi(t) dt. \quad (A.16)$$

2.3 Calcul de la viscosité turbulente

L'équation de la quantité de mouvement s'écrit [9, 11] le fluide étant considéré comme incompressible ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ (v + v') \frac{\partial u}{\partial r} - uv \right] \quad (A.17)$$

On dérive (A.17) par rapport à  $r$  en faisant l'hypothèse que, pour un fluide incompressible

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r} \ll \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x \partial r}. \quad (A.18)$$

Cette hypothèse a toujours été faite [14, 19]. Du reste, des mesures très précises [9] montrent que le gradient axial de

pression statique  $\partial p / \partial r$  est négligeable devant le gradient axial de pression dynamique  $\partial(\frac{1}{2} \rho u^2) / \partial r$ .

En portant (A.7) dans (A.17), et en faisant les changements de variable convenables, il vient, au ler ordre en  $\mathcal{A}_0$  :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (2U_0 U_1 \mathcal{A}_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda \left[ \left( 1 + \frac{v'}{v} \right) \frac{4}{Re_0} \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \mathcal{A}_0 U_0 V \right] \right\}. \quad (A.19)$$

On intègre deux fois de suite en  $\lambda$  (A.19) en écrivant pour déterminer les fonctions arbitraires de  $X$  introduites par l'intégration, que la viscosité turbulente reste finie au centre du tube et qu'elle est nulle sur la paroi. Ainsi, en développant au ler ordre en  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{A}_0 X$  :

$$1 + \frac{v'}{v} = \frac{1}{\lambda U'_0(\lambda)} \left\{ \lambda^2 U'_0(1) + \mathcal{A}_0 X \left[ \lambda^2 U'_1(1) - \frac{\lambda^2 U'_0(1) U_1(\lambda)}{U_0(\lambda)} \right] + \mathcal{A}_0 \left[ U_2(1) \lambda^2 - \frac{Re_0}{2} \lambda^2 \int_0^1 U_0 U_1 t dt + \frac{Re_0 U_0 V \lambda}{4} + \frac{Re_0}{2} \int_0^\lambda U_0 U_1 t dt - \frac{U'_2(\lambda) U_0(1)}{U'_0(\lambda)} \lambda^2 \right] \right\}. \quad (A.20)$$

Cette expression est à rapprocher de celle que nous avons obtenue dans [14], dans le cas particulier où  $U_1 = -2U_0$ ,  $U_2 = 0$ . On peut vérifier que les expressions de  $v'/v$  sont alors identiques, le coefficient du terme en  $\mathcal{A}_0 X$  étant nul ( $v'/v$  indépendant de  $x$ ).

Nous avons besoin de

$$v_{T'}(X, \lambda) = 1 + \frac{Sc v'}{Sc' v}. \quad (A.21)$$

Si on admet que  $Sc'$  est seulement fonction de  $\lambda$ , il vient :

$$v_T = v_{T_0} + \mathcal{A}_0 X v_{T_1} + \mathcal{A}_0 v_{T_2}, \quad (A.22)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} v_{T_0} &= 1 + \frac{Sc}{Sc'(\lambda)} \left( \frac{\lambda}{\varphi'_i(y_0^+)} - 1 \right) \\ v_{T_1} &= - \frac{Sc}{Sc'(\lambda) U'_0(\lambda)} \left[ \alpha Cf_0 Re_0 \lambda + \frac{\lambda U'_1(\lambda)}{\varphi'_i(y_0^+)} \right] \\ v_{T_2} &= \frac{Re_0}{4} \frac{Sc}{Sc'(\lambda) U'_0(\lambda)} \left[ \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda U_0 U_1 t dt - 2\lambda \int_0^1 U_0 U_1 t dt + U_0 V - \frac{4\lambda U'_2(\lambda)}{\varphi'_i(y_0^+) Re_0} - 4Cf_0 \beta \lambda \right] \end{aligned} \right\} (A.23)$$

Remarque. Pour le calcul effectif de (A.23) on utilisera les expressions (A.8) à (A.11) ainsi que

$$\left. \begin{aligned} U_0(\lambda) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \varphi'_y(y_0^+), & U_0(1) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \\ U_1(\lambda) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \alpha [2\varphi'_y(y_0^+) + y_0^+ \varphi''_{y^2}(y_0^+)], & U_1(1) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \alpha \\ U_2(\lambda) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \left[ \sqrt{\frac{2}{Cf_0}} \varphi''_{yy}(y_0^+) + \beta \varphi''_{y^2}(y_0^+) + 2\beta \varphi'_y(y_0^+) \right], & U_2(1) &= -\frac{Cf_0}{2} Re_0 \beta \end{aligned} \right\} \quad (A.24)$$

Les résultats concernant  $\lambda = 1$  sont obtenus en utilisant le fait qu'au voisinage de la paroi  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  devient  $u^+ = y^+$ . On a eu également besoin en (3.18) et (3.41) de

$$W(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} t U_0(t) dt = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{4}{Re_0} \left( \Phi(y_0^+) - \frac{\Phi_1(y_0^+)}{y^*} \right) \right], \quad (A.25)$$

$$L(\lambda) = \int_0^{\lambda} t U_2(t) dt = \frac{2}{y^*} \left\{ \psi_1(y^*) - \psi_1(y_0^+) - \frac{\psi_2(y^*)}{y^*} + \frac{\psi_2(y_0^+)}{y^*} \right\} - \frac{\beta}{\alpha} \lambda V(\lambda), \quad (A.26)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \int_0^y \varphi'_y(t) dt, & \psi_2 &= \int_0^y t \varphi'_y(t) dt \\ \Phi &= \int_0^y \varphi(t) dt, & \Phi_1 &= \int_0^y t \varphi(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (A.27)$$

Les expressions (A.27) sont données par des fonctions élémentaires dans le cas où on prend pour  $\varphi(y^+, v^+)$  un profil déduit du profil de Reichardt.

STUDY OF MASS TRANSFER IN A BINARY GAS MIXTURE UNDER TURBULENT FLOW CONDITIONS WITH WALL SUCTION

**Abstract**—A method is given for the calculation of the molar fraction distribution and the Sherwood number for a binary gas mixture (similar molecular weights) under turbulent flow conditions in a circular pipe with wall suction. For this purpose, we use a universal velocity distribution  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  and a numerical value of the turbulent Schmidt number. We obtain the molar fraction distribution and the diffusion thickness by direct integration of the diffusion equation, yielding a first approximation, valid for a suction factor  $\mathcal{A}_0 \rightarrow 0$ , and a second approximation (small  $\mathcal{A}_0$ ) which are compared to direct measurements.

UNTERSUCHUNG DES MASSENÜBERGANGS IN EINEM ZWEISTOFFGASGEMISCH MIT WANDSAUGWIRKUNG UNTER WIRBELSTROMVERHÄLTNISSEN

**Zusammenfassung**—Es wird eine Rechenmethode des Profils des Molenbruchs und der Sherwood'schen Zahl für eine binäre gasförmige Mischung in turbulenter Strömung (naheliegender Molekularmassen) in einem zylindrischem Rohr mit Wandsaugung angegeben. Man geht also von einem allgemeinen geschwindigkeitsprofil  $u^+ = \varphi(y^+, v^+)$  und einem numerischen Wert der turbulenten Schmidt'schen Zahl aus. Durch direkte Integration der Diffusionsgleichung erhält man das Profil des Molenbruchs und die Diffusionsdicke in Form einer ersten Annäherung (für einen Saugfaktor  $\mathcal{A}_0 \rightarrow 0$  gültig) und einer zweiten Annäherung ( $\mathcal{A}_0$  schwach) die mit direkten Messungen verglichen wird.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕНОСА МАССЫ В ГАЗОВОЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ  
ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ С ОТСОСОМ НА СТЕНКЕ

**Аннотация**—Приведен метод расчета распределения молярной концентрации и критерия Шервуда бинарной газовой смеси (подобные молекулярные веса) при условиях турбулентного течения в круглой трубе с отсосом на стенке. С этой целью использованы универсальное распределение скорости  $u^+ = (v^+, r^+)$  и численное значение турбулентного числа Шмидта. Распределение молярной концентрации и толщины диффузии получено непосредственным интегрированием уравнения диффузии, которое дает первую аппроксимацию, справедливую для коэффициента отсоса, и вторую аппроксимацию (малое значение). Проведено сравнение с непосредственными измерениями.